



PERGAMON

International Journal of Heat and Mass Transfer 44 (2001) 3295–3306

International Journal of
**HEAT and MASS
TRANSFER**

www.elsevier.com/locate/ijhmt

Dispersion radiale et axiale dans les écoulements tourbillonnaires de Taylor–Couette et Poiseuille

Radial and axial dispersion in Taylor–Couette and Poiseuille vortex flows

L. Guy Raguin, Mark Shannon, John G. Georgiadis *

*Laboratory for Quantitative Visualization in Energetics, Department of Mechanical and Industrial Engineering,
University of Illinois at Urbana–Champaign, Urbana, IL 61801, USA*

Reçu le 10 juin 1999; reçu en forme révisée le 17 juillet 2000

Résumé

Le transport de matière dans les écoulements tourbillonnaires de Taylor–Couette et Poiseuille est étudié expérimentalement à l'aide de l'injection d'un indicateur coloré et de particules, et d'une méthode électrochimique. Une cavité annulaire, avec un rapport entre les rayons intérieur et extérieur de 0.5, a été construite de manière à ce que le cylindre extérieur soit fixe et que le cylindre intérieur puisse tourner. En l'absence de circulation axiale forcée, l'écoulement de Taylor–Couette a été observé et le nombre de Sherwood pour la dispersion radiale a été mesuré. Lorsqu'un faible débit axial est imposé ($Re_a < 10$), un mécanisme pour la dispersion axiale proche de celui de la propagation d'un train d'onde dans un milieu dispersif a été avancé en se basant sur les résultats des observations. © 2001 Elsevier Science Ltd. All rights reserved.

Abstract

Mass transport in Taylor–Couette and Poiseuille vortex flows has been experimentally investigated by dye injection, particle tracking and electrochemical techniques. An annular cavity has been built with an inner/outer radius ratio of 0.5, with a fixed outer cylinder and a rotating inner one. Without any axial flow, the standard Taylor–Couette flow was observed and the Sherwood number for radial dispersion measured. When a low axial flow rate was imposed ($Re_a < 10$), a mechanism for axial dispersion similar to the dispersion of a wave packet was drawn from visualization results. © 2001 Elsevier Science Ltd. All rights reserved.

1. Introduction

L'écoulement de Taylor–Couette entre deux cylindres coaxiaux, où un seul ou les deux sont animés d'un mouvement de rotation, a été étudié en profondeur dans le passé pour sa structure stratifiée et ses diverses propriétés relatives aux transports de chaleur et de matière. Lorsque le cylindre extérieur est fixe

et que le cylindre intérieur tourne, au-delà d'une certaine vitesse de rotation critique, l'énergie transmise au fluide par la rotation du cylindre intérieur produit deux écoulements rotationnels: un mouvement global circonférentiel et la formation de tourbillons de Taylor répartis uniformément le long de l'axe des cylindres sous forme de tores. Cet écoulement tourbillonnaire est appelé écoulement laminaire de Taylor–Couette, chaque tourbillon est un tourbillon de Taylor, et une cellule de Taylor est constituée de deux tourbillons adjacents tournant en sens inverse l'un de l'autre.

* Corresponding author. Tel.: +1-217-244-7578.

E-mail address: georgia@uiuc.edu (J.G. Georgiadis).

Nomenclature			
A	aire de la cathode (m^2)	R_1	rayon du cylindre intérieur (m)
c	vitesse d'onde (m s^{-1})	R_2	rayon du cylindre extérieur (m)
c_{rL}	partie réelle de la vitesse d'onde (m s^{-1})	R_{cellule}	résistance électrique de la cellule électrolytique (Ω)
C_{centre}	concentration au cœur de l'espace annulaire (mol l^{-1})	R_{contact}	résistance électrique du contact (Ω)
d	largeur de la cavité annulaire, $d = R_2 - R_1$ (m)	Re	nombre de Reynolds de rotation, $Re = 4\pi f_1 R_1 (R_2 - R_1) / \nu$
D	coefficient de diffusion moléculaire utilisé dans les définitions de Sc et Sh ($\text{m}^2 \text{s}^{-1}$)	Re_a	nombre de Reynolds axial, $Re_a = 2U_a (R_2 - R_1) / \nu$
$D_{\text{Cu}^{2+}}^{\text{H}_2\text{O}}$	coefficient de diffusion moléculaire de l'ion Cu^{2+} dans l'eau ($\text{m}^2 \text{s}^{-1}$)	Sc	nombre de Schmidt, $Sc = \nu / D$
F	nombre de Faraday ($96\,500 \text{ C mol}^{-1}$)	Sh	nombre de Sherwood, $Sh = 2k_m (R_2 - R_1) / D$
f_1	fréquence de rotation du cylindre intérieur (Hz)	Ta	nombre de Taylor, $Ta = 64/9 \times (2\pi f_1 R_1 / \nu)^2 (R_2 - R_1)^2$
h	période axiale, i.e., taille d'une cellule de Taylor constituée d'une paire de tourbillons (m)	\overline{Ta}	nombre de Taylor (définition utilisée par Mizushima [1])
$h_{\text{mesuré}}$	période axiale mesurée (m)	U_a	vitesse débitante axiale (m s^{-1})
$h_{\text{théorie}}$	période axiale théorique (m)	v_g	vitesse de groupe (m s^{-1})
i	courant électrique limite (A)	v_φ	vitesse de phase (m s^{-1})
$i_{\text{corrigé}}$	courant électrique limite corrigé (A)	<i>Symboles grecs</i>	
$i_{\text{mesuré}}$	courant électrique limite mesuré (A)	γ	rapport des nombres de Reynolds axial et de rotation, $\gamma = Re_a / Re$
k	nombre d'onde (m^{-1})	Γ	rapport d'aspect, $\Gamma = L/d$
\bar{k}	nombre d'onde moyen (m^{-1})	η	rapport des rayons intérieur et extérieur, $\eta = R_1 / R_2$
k_m	coefficient de transport de matière (m s^{-1})	λ	longueur d'onde (m)
L	longueur des cylindres (m)	ν	viscosité cinématique de l'eau ($\text{m}^2 \text{s}^{-1}$)
n	indice de réfraction	ω	fréquence d'onde (s^{-1})
n_c	nombre de valence d'un ion	$\bar{\omega}$	fréquence d'onde moyenne (s^{-1})
		$\Delta\omega$	intervalle de fréquences (s^{-1})

Pour un rapport entre les rayons des cylindres intérieur et extérieur inférieur à 0.714, lorsque la vitesse de rotation est augmentée, l'écoulement devient turbulent sans passer par des régimes secondaires d'après Coles [2], ce qui a été confirmé par plusieurs études, dont celle de Gu et Fahidy [3]. Cependant, dans leur étude sur les effets de bords, Lorenzen et al. [4] ont observé le régime des tourbillons oscillants de Taylor en utilisant une méthode de vélocimétrie laser par effet Doppler pour $\eta = 0.507$ et un aspect de forme Γ variable. Dans ce type d'écoulement une seconde instabilité apparaît sous la forme d'une oscillation circonférentielle, ce qui rompt la symétrie cylindrique du problème: les frontières entre tourbillons oscillent à une certaine fréquence. Ils montrent ainsi que ce mode de tourbillons oscillants apparaît pour Γ entre 14 et 17. Puisque leur seul paramètre est Γ , ils ont attribué la présence de ce régime à des effets de bords. Dans son étude par simulation numérique de la transition vers ce régime de tourbillons oscillants de Taylor, Jones [5] est parvenu quant à lui à obtenir ce régime dans une cavité annulaire infinie (où les effets de bords ne sont donc pas modélisés), avec η variant entre

0.5 et 0.8, en faisant varier arbitrairement la taille des tourbillons. Cette approche numérique du problème montre seulement que ce régime est une des solutions possibles au problème mais n'indique pas comment l'obtenir expérimentalement. Les effets de bords qui sont nécessairement présents lors d'une expérience de par la finitude de la cavité annulaire introduisent des conditions aux limites différents et tendent à favoriser une solution plus qu'une autre, ce qui fait qu'expérimentalement le mode des tourbillons oscillants n'est pas forcément observé.

La présente étude porte sur le transport de matière dans une cavité intercyllindrique avec un rapport de rayons: $\eta = 0.5$ où le cylindre extérieur est fixe, pour un écoulement de Taylor–Couette avec et sans superposition d'un écoulement axial de type Poiseuille. L'étude se limite à des vitesses de rotation n'excédant pas 10 fois la vitesse critique et à de faibles débits axiaux. Le premier type d'écoulement est caractérisé par le nombre de Taylor, Ta , nombre sans dimension traduisant le rapport des forces d'inertie dues à la rotation du cylindre intérieur et des forces de dissipation visqueuse. Le sec-

ond est défini par ce même nombre de Taylor et le nombre de Reynolds axial Re_a calculé à partir de la distance entre les cylindres et de la vitesse débitante uniforme U_a correspondant à l'écoulement axial forcé:

$$Ta = \frac{64}{9} \left(\frac{2\pi R_1 f_1}{v} \right)^2 (R_2 - R_1)^2, \quad (1)$$

$$Re_a = \frac{2U_a(R_2 - R_1)}{v}. \quad (2)$$

Lorsqu'un écoulement axial de type Poiseuille est superposé à un écoulement de Taylor–Couette, tant que le nombre de Reynolds Re_a reste faible par rapport au nombre de Reynolds Re de rotation du cylindre intérieur, les tourbillons de Taylor se succèdent les uns à la suite des autres sans subir de déformations notables [6]. Les courbes reliant les centres des tourbillons forment des cercles centrés sur l'axe des cylindres, qui se déplacent à vitesse constante dans la direction axiale. Autrement dit, ce type d'écoulement, appelé mode cellulaire, est caractérisé par des tourbillons toroïdaux (cellules) se déplaçant dans la direction axiale. Pour ce régime, Gu et Fahidy font état de résultats apparemment contradictoires: dans un article paru en 1985 [7], leurs observations par traceur coloré montrent que les tourbillons sont inclinés d'un angle α , défini sur la Fig. 1, qui croît lorsque la rotation du cylindre intérieur est augmentée, pour $\eta = 0.714$, $\Gamma = 31.5$, $0 < Ta < 1581$ et $0 < Re_a < 150$; dans un article portant sur l'influence des paramètres géométriques paru en 1986 [3], ils notent que la direction de l'angle α change périodiquement pour $0.607 \leq \eta \leq 0.714$, $22.92 \leq \Gamma \leq 31.5$, $0 \leq Ta \leq 1581$ et $0 \leq Re_a \leq 150$. Ce phénomène d'oscillation peut être expliqué si on se réfère à la discussion sur le régime de tourbillons

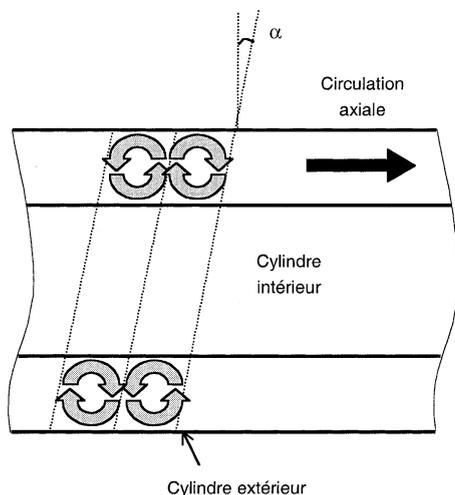


Fig. 1. Définition de l'angle d'inclinaison α (couple longitudinale).

oscillants de Taylor obtenu en l'absence de circulation axiale: les observations précédentes correspondent au cas où l'onde circonferentielle a un nombre d'onde exactement égal à 1. Il sera intéressant de visualiser l'éventuelle existence de ce mode dans nos expériences avec circulation axiale forcée, $\eta = 0.5$, et $\Gamma = 16$.

Lorsque le débit axial imposé devient trop important par rapport à la rotation du cylindre intérieur, l'écoulement devient hélicoïdal: la ligne reliant les centres des tourbillons est alors une hélice qui, à la manière d'une vis, tourne en avançant dans la direction axiale. Certains auteurs se basent sur Re_a pour déterminer la transition entre le mode cellulaire et le mode hélicoïdal [8], d'autres utilisent le rapport γ des nombres de Reynolds axial et de rotation [7], qui dépend du rayon et de la fréquence de rotation f_1 du cylindre intérieur de l'appareil ainsi que de la vitesse débitante U_a :

$$Re = \frac{4\pi f_1 R_1 (R_2 - R_1)}{v}, \quad (3)$$

$$\gamma = \frac{Re_a}{Re} = \frac{U_a}{2\pi f_1 R_1}. \quad (4)$$

2. Transport de matière dans les écoulements de Taylor–Couette avec et sans circulation axiale forcée

La dispersion radiale pour l'écoulement de Taylor–Couette sans circulation axiale a été quantifiée par Mizushima [1] qui a mesuré des coefficients de transport de matière grâce à la méthode électrochimique sous la forme du nombre de Sherwood pour deux géométries différentes ($\eta = 0.468$ et 0.617), sans préciser pour laquelle de ces deux géométries la corrélation qu'il a obtenue était valide. La loi d'évolution du nombre de Sherwood qu'il a obtenue fait intervenir un nombre de Taylor modifié, \overline{Ta} , différent de la définition donnée précédemment:

$$Sh = 0.74 \overline{Ta}^{1/2} Sc^{1/3} \quad (5)$$

avec

$$\overline{Ta} = \frac{2\pi f_1 R_1 d}{v} \sqrt{\frac{d}{R_1}}. \quad (6)$$

La dépendance du nombre de Sherwood par rapport à la racine cubique du nombre de Schmidt a été confirmée par les résultats de Legrand et al. [9].

Alors que la plupart des articles parus sur la dispersion axiale de matière dans les écoulements de Taylor–Couette avec et sans circulation axiale forcée utilisent un modèle à un seul paramètre – un coefficient de transport de matière dans la direction axiale – Desmet et al. [10] ont avancé un modèle à deux zones: une zone interne contenant les particules de fluide au centre d'un tourbillon

illon, et une zone externe constituée des particules aux bords du tourbillon, susceptibles de migrer dans un tourbillon voisin. Un coefficient de transport de matière interne régit les échanges de matière entre les deux zones d'un même tourbillon, et un second coefficient de transport de matière gère le transport de matière entre tourbillons adjacents, donnant ainsi lieu à un modèle à deux paramètres. Les modèles précédents ont été invalidés car ils supposaient un mélange parfait à l'intérieur de chaque tourbillon, et aucun échange de matière entre tourbillons en l'absence de circulation axiale forcée ou pour de faibles valeurs du nombre de Reynolds axial [11]. Ces modèles laissent de côté le régime des tourbillons oscillants de Taylor dans lequel le transfert de matière entre tourbillons est non nul [12]. Desmet et al. [10] ont depuis montré grâce à leurs expériences où un traceur coloré est injecté à différents emplacements dans un tourbillon, que le transport de matière entre tourbillons se fait uniquement par diffusion moléculaire lorsque le régime est laminaire. De plus, du fait que le coefficient de transport entre tourbillons est largement supérieur au coefficient de transport interne, le traceur coloré peut évoluer de tourbillon en tourbillon sans passer par leur zone centrale (Fig. 2). Il faut toutefois noter que l'étude de Desmet et al. a été menée pour les écoulements de Taylor–Couette sans circulation axiale, et il est nécessaire de vérifier leurs résultats dans le cas où une circulation axiale est imposée. Physiquement, ceux-ci n'ont pas de raison de changer radicalement dans le mode cellulaire puisque la structure des tourbillons semblent y être conservée.

D'après Kataoka et al. [13] et Legrand et al. [9], le coefficient de transport de matière dans la direction radiale est affecté par la circulation axiale imposée et diminue lorsque Re_a augmente. En effet, la circulation axiale stabilise l'écoulement et atténue le transport radial de matière causé par les tourbillons de Taylor. Ainsi, à nombres de Taylor égaux, le coefficient de transport de

matière dans la direction radiale en l'absence de débit axial forcé est supérieur à celui mesuré en présence d'une circulation axiale [13]. Si le transport de matière dans la direction radiale a été particulièrement étudié, les mécanismes intervenant dans la dispersion axiale n'ont pas été étudiés à ce jour. Il a cependant été observé que lorsque la circulation axiale est augmentée, la taille des tourbillons augmente et reste uniforme le long de la longueur des cylindres pour $Re_a < 50$ [11], et les tourbillons se déplacent dans la direction axiale à la vitesse du débit axial sans échange de matière entre eux [6]. Ceci est en accord avec les travaux de Takeuchi et Jankowski [8], qui ont étudié la stabilité de l'écoulement hélicoïdal de Poiseuille et prévoient que les tourbillons de Taylor cessent d'exister pour former une hélice à partir de Re_a supérieur à 48, d'où l'apparition d'un angle d'inclinaison α qui correspond au pas de l'hélice [8]. Certains de ces résultats sont controversés par Gu et Fahidy [7] qui montrent qu'il existe un échange de matière entre les tourbillons dû à un chevauchement entre les tourbillons, ce qui fait que la hauteur des tourbillons diminue. De plus, ils notent que les tourbillons sont inclinés d'un angle α lorsque le rapport γ est supérieur à 4.36%, choisissant ainsi comme paramètre γ à la différence de Takeuchi et Jankowski qui utilisent Re_a [8].

La présente étude porte sur les écoulements de Taylor–Couette et Poiseuille dans le mode cellulaire (tourbillons se déplaçant dans la direction axiale), avec $Re_a < 10$, et a pour buts:

1. d'utiliser la méthode électrochimique de Mizushima [1] pour déterminer le nombre de Sherwood caractérisant la dispersion radiale,
2. d'observer les changements qui apparaissent lorsqu'une circulation axiale est superposée à l'écoulement de Taylor–Couette et ainsi vérifier qualitativement si le modèle proposé par Desmet et al. [10] peut s'étendre à ce type d'écoulement, et comparer nos observations à celles de Gu et Fahidy [3,7],

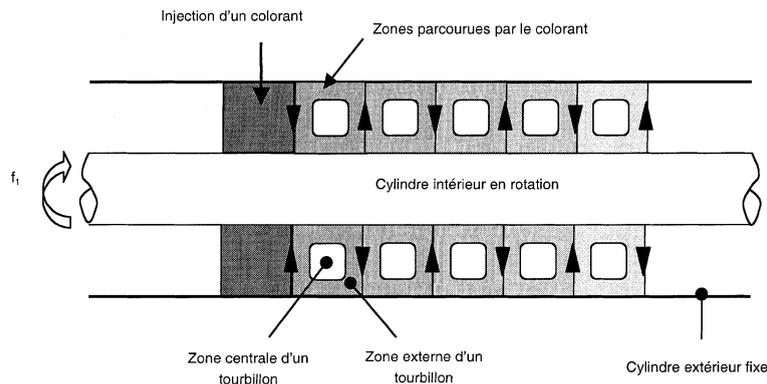


Fig. 2. Parcours d'un colorant injecté dans un écoulement de Taylor–Couette laminaire. Le colorant est injecté de manière homogène dans le tourbillon de gauche (voir [10]).

3. d'apporter une explication quant au mécanisme de la dispersion axiale,
4. et finalement de créer un standard de comparaison avec d'autres expériences utilisant des méthodes d'observation non-invasives comme l'IRMN (imagerie par résonance magnétique nucléaire) [14].

3. Mesure du coefficient de transport de matière dans l'écoulement de Taylor–Couette

3.1. Principe des mesures

La méthode de mesure électrochimique employée ici est inspirée des travaux de Mizushina [1]. L'oxydoréduction d'un électrolyte, ici une solution de sulfate de cuivre CuSO_4 de concentration 0.003 mol l^{-1} dans une solution d'acide sulfurique H_2SO_4 titrée à 2 mol l^{-1} , sert à modéliser les flux entrant et sortant de la zone d'étude. Les cylindres sont en cuivre et jouent le rôle d'électrodes. Lorsqu'une tension est appliquée entre les deux cylindres, l'ion cuivrique Cu^{2+} est réduit à la cathode et se dépose sous forme de cuivre sur le cylindre porté à un potentiel négatif, et les atomes de cuivre anodique passent en solution par oxydation en Cu^{2+} . Ce procédé permet de fixer les conditions aux limites en terme de flux mais la conservation des charges électriques au sein de la solution impose une relation entre les flux entrant et sortant puisque la masse d'ions Cu^{2+} entrant dans la solution doit être égale à celle qui se dépose sur la cathode.

La méthode expérimentale consiste à accroître la différence de potentiel pas à pas et à mesurer l'intensité du courant qui passe entre les électrodes pour une vitesse de rotation donnée. Le courant augmente progressivement jusqu'à un plateau traduisant la présence d'un courant limite, dont la valeur permet de déterminer le coefficient de transport de matière allant de l'anode à la cathode. Ce courant limite traduit une saturation causée par la cinétique de l'oxydoréduction et reste stable sur une certaine plage de valeurs de la tension appliquée. La vitesse de déposition et de création des ions cuivriques ne peut dépasser une certaine valeur mis en évidence par le courant limite. Cette valeur correspond à un équilibre entre le phénomène de diffusion des cations dans la solution de concentration constante et leur déposition sur la cathode ou leur concentration est quasiment nulle. Des oscillations sont enregistrées lors des mesures, et sont dues à l'écoulement de Taylor–Couette entre les cylindres coaxiaux.

Mizushina montre que la concentration en ions cuivriques à la cathode peut être considérée comme nulle car la cinétique de déposition sur le cylindre peut être supposée infiniment rapide. Par ailleurs, le terme dû à la convection dans la direction radiale au sein du corps du fluide étant en moyenne nul, et en négligeant le terme dû

à la migration des ions sous l'effet du champ électrique au sein du corps du fluide, l'écriture d'un bilan de matière à la surface de la cathode pour les ions cuivriques dans la direction radiale permet d'obtenir une expression du coefficient de transport massique k_m et ainsi du nombre de Sherwood Sh pour la configuration géométrique choisie et la vitesse de rotation imposée:

$$\frac{i}{An_e F} = k_m C_{\text{centre}} \quad (7)$$

d'où

$$Sh = \frac{2(R_2 - R_1)}{An_e F D_{\text{Cu}^{2+}}^{H_2O}} i. \quad (8)$$

Après le plateau obtenu dans les courbes du courant en fonction de la différence de potentiel appliquée, si la différence de potentiel est augmentée, le courant augmente alors à nouveau car un autre phénomène apparaît. Il s'agit en général de l'électrolyse de l'eau qui libère de nouveaux ions, ce qui entraîne la création d'un courant additionnel.

3.2. Méthode et résultats expérimentaux

Pour cette première série d'expériences, le dispositif expérimental est celui décrit sur les Figs. 3 et 4, et la géométrie de l'appareil est donnée dans le Tableau 1. Deux cylindres coaxiaux sont placés verticalement et un moteur Indiana General, System 4000 AC/DC model 4050, d'une puissance de 3/4 CV entraînant le cylindre intérieur est disposé au-dessus d'eux. Le moteur et les cylindres sont fixés sur un cadre métallique permettant certains ajustements pour assurer leur alignement. Il est nécessaire de fixer la partie inférieure du cylindre intérieur par rapport au cylindre extérieur afin d'assurer la position relative des deux cylindres et la stabilité de la rotation.

Pour ce faire, un cône en nylon a été placé à l'extrémité du cylindre intérieur afin que sa pointe puisse tourner dans la cavité conique réalisée au centre de la conduite de remplissage. Des trous périphériques ont été percés pour permettre le remplissage et la vidange de la cavité. Le cylindre intérieur est doté d'un disque en plastique placé à sa base inférieure afin de séparer la cavité-test de la partie de remplissage/vidange du montage.

Pour l'application de la méthode électrochimique, les deux cylindres servent d'électrodes et sont donc en cuivre. Pour chaque vitesse de rotation étudiée, les cylindres en cuivre sont préalablement nettoyés avec de la laine de fer extra-fine pour l'intérieur du cylindre extérieur et du papier de verre de grain 400 pour l'extérieur du cylindre intérieur afin d'obtenir le même état de surface initial. Une source de tension continue sert à appliquer la différence de potentiel entre les deux cylindres.

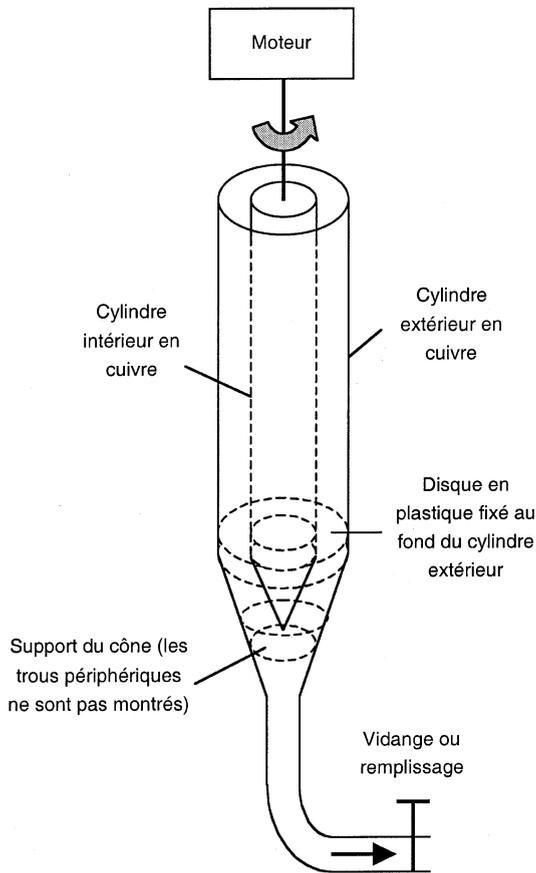


Fig. 3. Montage expérimental pour les mesures électrochimiques.

La cavité entre les deux cylindres coaxiaux est remplie à chaque fois jusqu'à la même hauteur $L = 9.8$ cm ($\Gamma = 10.3$) par la solution acide de sulfate de cuivre alors que le système est au repos. Le cylindre intérieur est ensuite mis en mouvement et la vitesse de rotation est mesurée à l'aide d'un stroboscope et d'un repère placé sur le cylindre intérieur. Après 20 min, l'écoulement est considéré comme établi et la différence de potentiel est appliquée. Pour la géométrie du dispositif utilisé, la vitesse critique est de 7.2 tr min^{-1} .

Les courbes du courant électrique mesuré en fonction de la tension appliquée correspondent à différentes vitesses de rotation du cylindre intérieur: 87, 141 et 143 tr min^{-1} , soit des rapports du nombre de Taylor au nombre de Taylor critique respectivement de 146, 384 et 394 (Fig. 5).

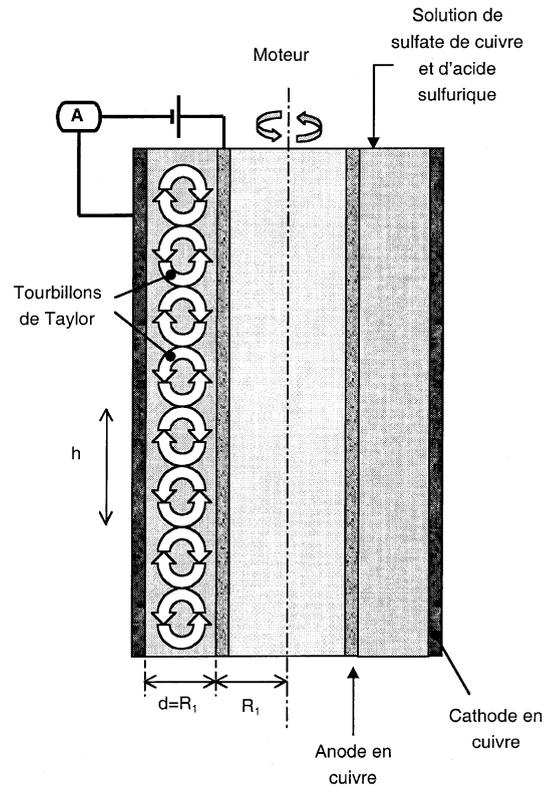


Fig. 4. Coupe longitudinale du montage expérimental pour la méthode électrochimique.

3.3. Correction des mesures

Pour ces expériences, un problème de nature électrique est apparu: le contact électrique entre le cylindre intérieur animé d'un mouvement de rotation et la source de tension qui se faisait par un roulement à billes était défectueux. Comme effet immédiat, les mesures de courant pendant les expériences oscillaient largement autour de la valeur moyenne calculée et reportée sur les graphes. La résistance du contact R_{contact} qui aurait dû être nulle, a été mesurée à 300Ω . La résistance de la solution électrolytique R_{cellule} avait une valeur de 16.5Ω au repos. Le courant mesuré a donc dû être corrigé afin d'obtenir les valeurs correctes du coefficient de transport de matière et compenser ce problème.

Le coefficient correcteur utilise la proportionnalité entre le courant électrique et l'inverse de la résistance du circuit. La résistance électrique du circuit se compose de

Table 1
Géométrie des expériences électrochimiques

R_1 (cm)	R_2 (cm)	η	L (cm)	Γ	f_1 critique (tr min^{-1})
0.953	1.91	0.5	9.8	10.3	7.2

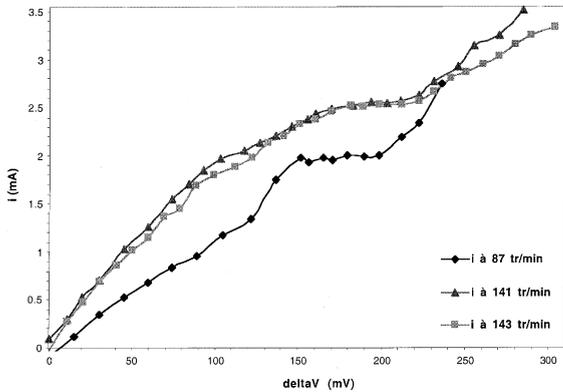


Fig. 5. Courbes du courant mesuré en fonction de la différence de potentiel imposée entre électrodes pour différentes vitesses de rotation.

la résistance de la cellule électrolytique et de la résistance du contact, ainsi:

$$i_{\text{mesuré}} \propto \frac{1}{R_{\text{contact}} + R_{\text{cellule}}} \quad (9)$$

et

$$i_{\text{corrigé}} \propto \frac{1}{R_{\text{cellule}}} \quad (10)$$

En supposant que la résistance de la cellule électrolytique lorsque le cylindre intérieur est mis en mouvement garde la même valeur qu'au repos, la correction se fait de la manière suivante:

$$i_{\text{corrigé}} \propto \frac{R_{\text{contact}} + R_{\text{cellule}}}{R_{\text{cellule}}} i_{\text{mesuré}} \quad (11)$$

ainsi

$$i_{\text{corrigé}} = 19.2 \times i_{\text{mesuré}} \quad (12)$$

En réalité, la résistance de la cellule électrolytique lorsque le cylindre intérieur tourne diminue car l'écoulement facilite le mouvement des ions dans la solution. Cela fait que l'hypothèse précédente donne une approximation par défaut du courant électrique limite.

Les résultats après correction sont donnés dans le Tableau 2. Les coefficients de transport de matière sont

Table 2
Nombres de Sherwood corrigés, calculés à partir des expériences électrochimiques

Vitesse de rotation (tr min ⁻¹)	87	141	143
Ta (×10 ⁻⁶)	4.86	12.7	13
Ta/Ta _c	146	384	394
Sh corrigé	214	271.8	272.2
Sh d'après la corrélation de Mizushima	268	341	344

présentés sous la forme du nombre de Sherwood sans dimension, qui traduit le rapport entre le flux de matière total et le flux de matière dû uniquement à la diffusion. Pour le transport de l'ion Cu²⁺ dans l'eau, le nombre de Schmidt est Sc = 2000.

3.4. Discussion

Ces expériences montrent que l'écoulement de Taylor–Couette participe au transport de matière dans la direction radiale puisque les nombres de Sherwood sont de l'ordre de la centaine pour des nombres de Taylor de 100 à 400 fois supérieur à la valeur critique. Les résultats sont du même ordre de grandeur que ceux de Mizushima; la différence de géométrie entre les deux expériences (le rapport entre les rayons des cylindres η vaut 0.5 dans notre cas, 0.468 et 0.617 dans ses travaux Mizushima), et les problèmes électriques apparus dans nos expériences expliquent probablement les écarts constatés.

4. Etude de l'écoulement de Poiseuille par injection d'un indicateur color

4.1. Montage expérimental

Une nouvelle cavité annulaire horizontale a été fabriquée avec η = 0.5 et Γ = 10 (Fig. 6). Pour créer une circulation axiale, des orifices d'entrée et de sortie ont été aménagés en amont et en aval de la cavité. Afin de régulariser l'écoulement dans la partie utile de la cavité, deux disques d'une épaisseur de 1 cm et munis de nombreux pores de diamètre 1 mm, ont été fixés sur le stator de part et d'autre de la cavité. De cette manière, l'écoulement arrivant dans la cavité est axial et uniformément réparti. L'étanchéité entre le cylindre intérieur tournant et le stator a été réalisée par un joint à lèvres en caoutchouc et un roulement à bille avec des sphères en verre. Les matériaux utilisés ont été choisis afin que le montage puisse également servir dans une expérience ultérieure d'imagerie par résonance magnétique: aussi les matériaux devaient être non ferromagnétiques. Des

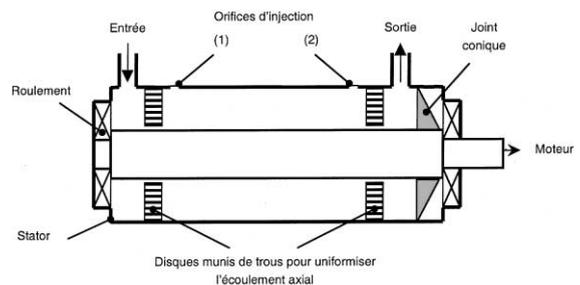


Fig. 6. Cavité inter cylindre pour l'écoulement de Poiseuille (coupe axiale).

Table 3
Géométrie du montage expérimental pour l'écoulement de Poiseuille

R_1 (cm)	R_2 (cm)	η	L (cm)	Γ	f_1 critique (tr min ⁻¹)	$h_{\text{théorie}}$ (cm)
0.953	1.91	0.5	15.24	16	7.2	1.89

pores pour l'injection d'un indicateur coloré et pour l'élimination des bulles d'air résidant dans la cavité ont été percés dans le cylindre en plexiglas extérieur et remplis par de la gomme à travers laquelle une seringue peut être aisément enfoncée tout en assurant une complète étanchéité. Comme les vitesses axiales sont relativement peu élevées, deux valves servant à réguler le débit axial sont ajoutées avant et après la pompe. Les valeurs des paramètres géométriques sont données dans le Tableau 3, où la valeur théorique de la taille des tourbillons correspond à l'écoulement de Taylor–Couette sans circulation axiale [15]:

$$h = \frac{2\pi R_1}{3.163} = 1.89 \text{ cm.} \quad (13)$$

Pour visualiser l'écoulement hélicoïdal de Poiseuille, un colorant a été introduit par le pore d'injection situé en amont de la cavité et son évolution a été enregistrée à l'aide d'une caméra vidéo 8 mm. Divers vitesses de rotation et débits axiaux ont été utilisés ($228 \leq Re \leq 589$, $0 \leq Re_a < 10$) afin que l'écoulement reste dans le mode cellulaire, et la taille des tourbillons, leur vitesse axiale et leur angle inclinaison α (Fig. 7) ont été mesurés. Notons que pour des vitesses de rotations supérieures à 30 tr min⁻¹, le colorant se disperse trop rapidement et aucune mesure n'est possible.

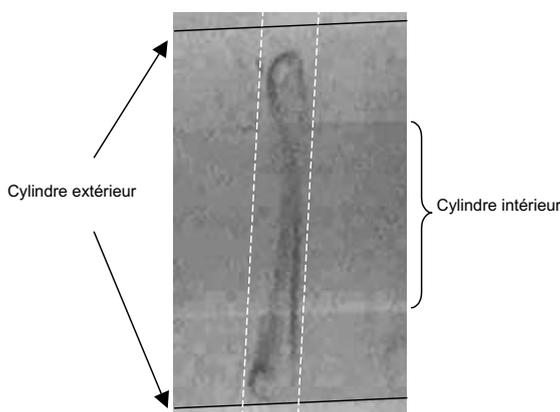


Fig. 7. Visualisation d'un tourbillon de Taylor incliné. $f_1 = 15 \text{ tr min}^{-1}$ ($Re = 285$), débit axial de 1 l h^{-1} ($Re_a = 6.19$), $\gamma = 2.17\%$. L'angle α mesure 5.9° .

4.2. Résultats et interprétation

La Fig. 7 montre un tourbillon de Taylor incliné, sans pour autant que l'écoulement soit devenu hélicoïdal. En effet, la forme des tourbillons est toujours toroïdale, et c'est la circulation axiale ainsi que des effets de bords probables qui font que ce tore est incliné. L'angle d'inclinaison est constant, ne change pas de direction, et aucun mode de tourbillons oscillants n'a été mis en évidence. Une première séquence d'images extraites du film de l'expérience présente l'injection d'un filament d'indicateur coloré et sa déformation dans le premier tourbillon de Taylor, ainsi que le lent mouvement axial des cellules de Taylor à l'aval (Fig. 8). Une seconde séquence illustre clairement les mouvements hélicoïdaux dans la direction axiale et dans la direction transversale respectivement par le passage du colorant du premier tourbillon au deuxième, et par le repli sur elle-même de la fine bande de colorant lorsqu'elle tourne autour du cylindre intérieur (Fig. 9). En comparant ces résultats à la Fig. 2 correspondant aux résultats de Desmet et al. [10], il est clair que le colorant reste principalement dans la partie externe des tourbillons. Ainsi leurs résultats s'étendent-ils aux écoulements de Taylor–Couette avec circulation axiale forcée.

Les résultats donnés dans le Tableau 4 permettent d'aboutir aux conclusions suivantes:

1. Lorsque le rapport des nombres de Reynolds axial et de rotation augmente, la taille des tourbillons diminue et l'angle d'inclinaison augmente, ce qui est similaire aux résultats de Gu et Fahidy [7] (qui ont utilisé comme paramètres: $0.607 \leq \eta \leq 0.714$, $22.92 \leq \Gamma \leq 31.5$, $0 \leq Re \leq 1581$ et $0 \leq Re_a \leq 150$), et diffère de ceux de Legendre et al. [11] (pour qui $\eta = 0.775$, $\Gamma = 60$, $0 < Re < 1775$, $30 < Re_a < 770$). Il faut toutefois noter que la taille des tourbillons dans l'écoulement de Taylor est supérieure à celle dans l'écoulement de Poiseuille et que même pour $Re_a < 50$, α est non nul. Ce dernier résultat n'est pas en contradiction avec les travaux de Takeuchi et Jankowski [8] car leur étude numérique suppose que l'écoulement passe directement du régime cellulaire sans inclinaison des tourbillons au régime hélicoïdal. Devant l'apparent désaccord entre les résultats sur la taille des tourbillons obtenus par différents auteurs, il semble raisonnable de penser que ce problème de sélection d'une taille de tourbillon étant à solutions multiples, la géométrie de la cavité et les conditions expérimentales favorisent une des solutions, variable au cas par cas.

2. La vitesse axiale des tourbillons est supérieure à la vitesse axiale correspondant au débit imposé, ce qui est

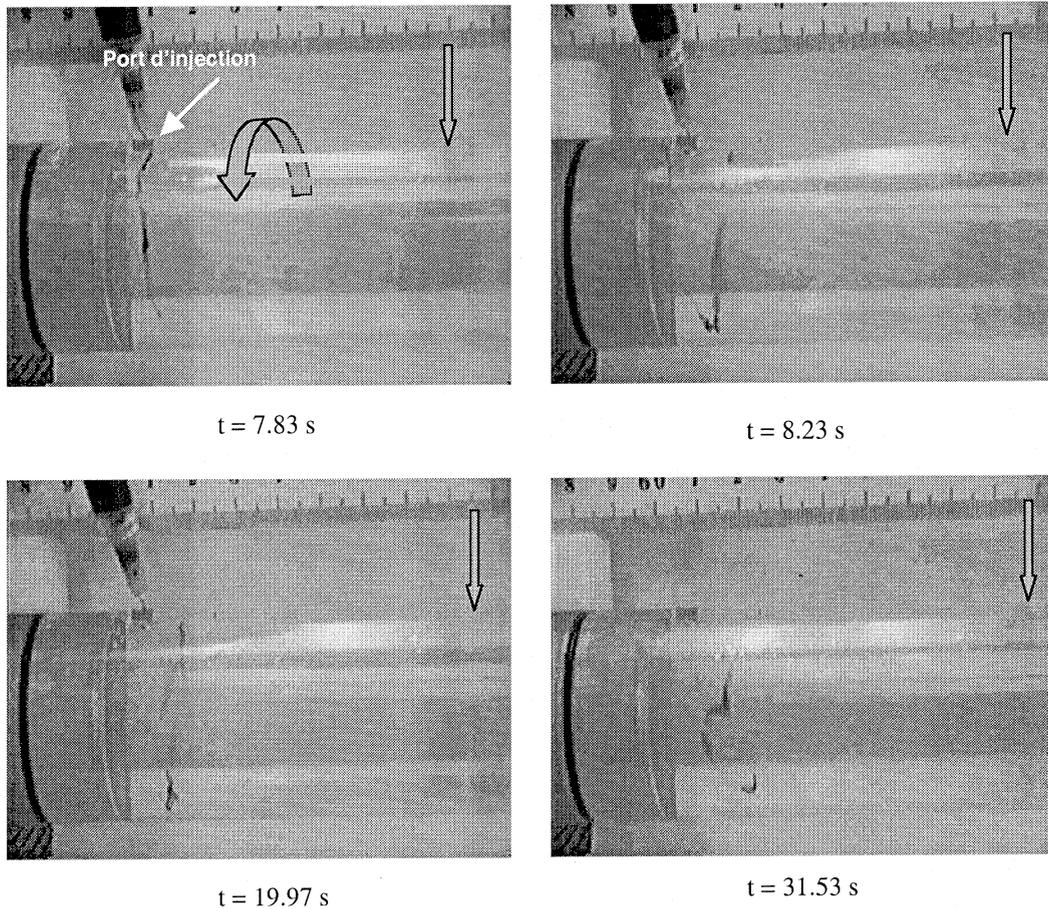


Fig. 8. Images extraites du film de l'injection d'indicateur coloré dans un écoulement hélicoïdal de Poiseuille où l'écoulement axial va de gauche à droite. Le filament de colorant (à gauche) se déplace dans le premier tourbillon de Taylor juste après le disque percé de trous. Après une rotation autour du cylindre intérieur, le filament entre dans le deuxième tourbillon de Taylor. La flèche verticale indique le déplacement d'un tourbillon de Taylor créé par une injection précédente.

en contradiction avec les travaux de Giordano et al. [16] ($\eta = 0.677$, $\Gamma = 18.3$, $260 \leq Re \leq 1230$, $0.344 \leq Re_a \leq 2.13$) et constitue un phénomène expérimental jusqu'ici peu mentionné (étude de la stabilité de l'écoulement par Snyder [17] avec $\eta = 0.95$, $\Gamma = 285$, $0 < Re_a < 200$). Ce phénomène a cependant été prévu mais non étudié en profondeur dans les études numériques linéaires de la stabilité de l'écoulement par Takeuchi et Jankowski [8], et Chung et Astill [18] où la vitesse de propagation c_{TL} est supérieure à l'unité.

Pour tenter d'expliquer ce résultat apparemment paradoxal, un simple bilan de matière montre qu'un échange de matière inter-tourbillon est nécessaire. En effet, en l'absence d'un tel échange de matière, les tourbillons seraient des systèmes fermés et la conservation de la matière entre l'amont et l'aval de la cavité annulaire ferait qu'ils devraient se déplacer à la vitesse débitante axiale imposée, ce qui contredirait nos observations.

Il peut être utile de faire une analogie avec la propagation d'un train d'onde dans un milieu dispersif pour comprendre comment la vitesse des tourbillons peut être supérieure à la vitesse débitante. Cela correspond aux formulations mathématiques de diverses études numériques qui modélisent le champ de vitesse par une onde se propageant dans les directions radiale, azimutale et axiale [5,8,18,19]. Dans le cas d'une onde faiblement non monochromatique dont le spectre s'étend autour d'une fréquence $\bar{\omega}$ donnée, la vitesse de phase et la vitesse de groupe peuvent être différentes si l'indice de réfraction n du milieu dépend de la longueur d'onde (si n est constant, elles sont égales):

$$\bar{\omega} - \frac{\Delta\omega}{2} \leq \omega \leq \bar{\omega} + \frac{\Delta\omega}{2} \quad \text{avec} \quad \frac{\Delta\omega}{\bar{\omega}} \ll 1. \quad (14)$$

La relation de dispersion entre le nombre d'onde k et la fréquence d'onde ω est alors non linéaire:

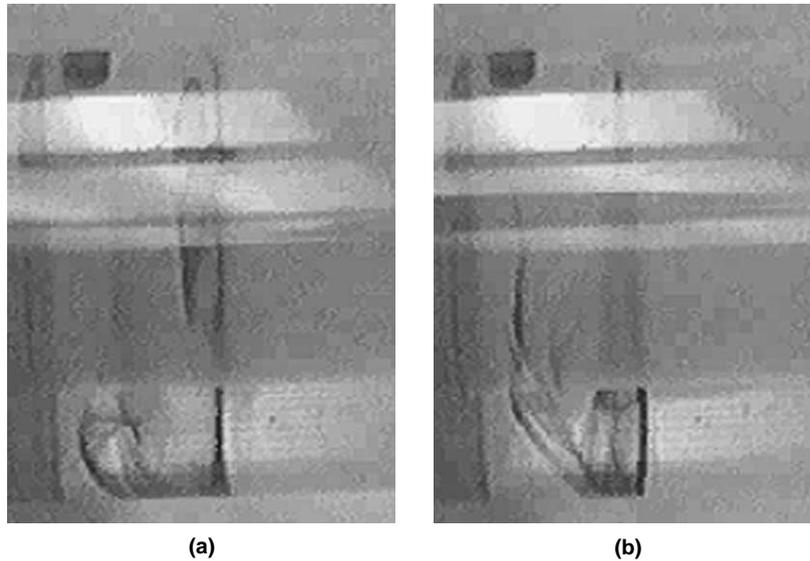


Fig. 9. Images du passage du colorant du premier tourbillon (a) au second (b). $f_1 = 20 \text{ tr min}^{-1}$ ($Re = 380$), débit axial de 1 l h^{-1} ($Re_a = 6.19$), $\gamma = 1.63\%$.

$$k = n(\omega) \frac{\omega}{c}. \quad (15)$$

La vitesse de groupe v_g correspond au transport d'énergie et de matière alors que la vitesse de phase v_φ ne participe au transport d'aucune grandeur physique. Elles sont respectivement définies de la manière suivante, en supposant que le spectre de l'onde incidente est étroit autour de $\bar{\omega}$:

$$v_\varphi = \frac{\bar{\omega}}{\bar{k}} \quad \text{avec} \quad \bar{k} = n(\bar{\omega}) \frac{\bar{\omega}}{c}, \quad (16)$$

$$v_g = \left(\frac{d\omega}{dk} \right)_{\bar{k}}. \quad (17)$$

Dans le cas énoncé, en introduisant la longueur d'onde correspondant au nombre d'onde \bar{k} , la vitesse de groupe diffère de la vitesse de phase:

$$v_g = v_\varphi - \lambda \frac{dv_\varphi}{d\lambda}. \quad (18)$$

Cette analogie s'applique au transport de matière dans l'écoulement de Poiseuille de la manière suivante: la vitesse débitante imposée, traduisant un transport de matière, correspond à la vitesse de groupe, et la vitesse axiale des tourbillons a le rôle de la vitesse de phase. Alors que la vitesse axiale d'une particule de fluide se déplace en moyenne à la vitesse débitante imposée par conservation de matière, il est possible d'imaginer que les tourbillons avancent à une vitesse plus rapide. Cela est uniquement faisable parce qu'un tourbillon n'est pas constitué des mêmes particules de fluide entre sa création en amont et sa fin en aval. Des particules de fluides entrent et sortent du tourbillon tout au long de son parcours, comme l'ont montré Desmet et al. [10], et cela fournit une explication à nos observations.

Table 4

Paramètres et résultats des expériences par injection d'indicateur coloré dans un écoulement de Poiseuille

Expérience	No. 1	No. 2	No. 3	No. 4
Débit axial (l h^{-1})	1	1	1.5	1.5
Vitesse axiale correspondante (mm s^{-1})	0.325	0.325	0.4875	0.4875
Re_a	6.19	6.19	9.283	9.283
f_1 (tr min^{-1})	12	20	24	31
Re	228	380	456	589
$\gamma = Re_a/Re$ (%)	2.71	1.63	2.04	1.58
Taille d'une paire de tourbillons (cm)	1.69	1.77	1.75	–
Angle α mesuré (degrés)	3.6	0	0.94	0
Vitesse des tourbillons mesurée (mm s^{-1})	0.61	0.6	0.63	0.54

Considérons deux cas dans lesquels une particule de fluide se trouve à la limite entre deux tourbillons adjacents: dans le premier cas, la particule provient du tourbillon en amont et se trouve en face d'un tourbillon situé en aval par rapport à elle, dans le second cas, la particule est en face d'un tourbillon situé en amont d'elle. Pour la première particule de fluide, la probabilité de rester dans son tourbillon sera plus importante que d'aller dans le sens du débit axial (Particule no. 1 sur la Fig. 10). Au contraire, la seconde particule de fluide va avoir de plus grandes chances d'aller à contre-courant plutôt que de rester dans son tourbillon (Particule no. 2 sur la Fig. 10). De l'ensemble, s'ensuivent une vitesse axiale moyenne de chaque particule de fluide égale à la vitesse débitante imposée, ainsi qu'une vitesse axiale des tourbillons supérieure à la vitesse débitante imposée. Nos observations signifient donc que la vitesse axiale moyenne de toute particule de fluide est inférieure à la vitesse axiale d'un groupe immatériel de particules de fluide possédant la même phase; par exemple celles se situant à la limite entre deux tourbillons (un groupe immatériel de particules de fluide est un système ouvert constitué des particules possédant une même caractéristique, ici la même phase). Les simulations numériques de Haim et Pismen [20] montrent qu'il peut exister des lignes de courant "slalomant" entre les tourbillons, pour lesquelles la vitesse axiale est inférieure à celle des tourbillons. Cela signifie bien que les particules présentes sur ces lignes de courant vont à contre-courant par rapport au déplacement des tourbillons et explique pourquoi la vitesse moyenne est bien égale à la vitesse débitante alors que la vitesse des tourbillons lui est supérieure.

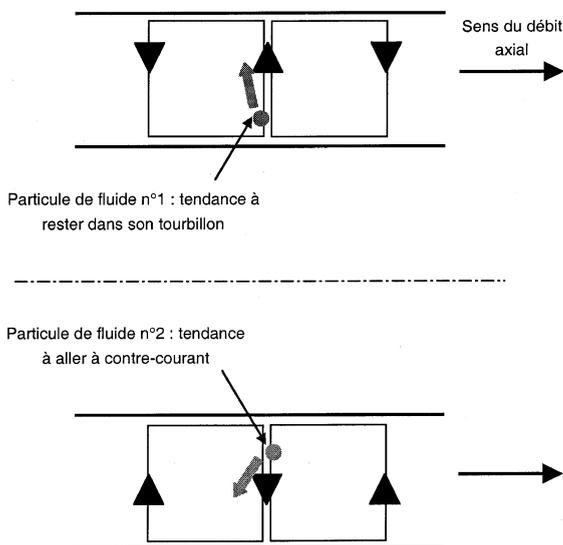


Fig. 10. Mécanisme du transport de matière dans l'écoulement de Poiseuille.

5. Conclusion

Le transport de matière dans les écoulements tourbillonnaires de Taylor–Couette et Poiseuille avec un faible débit axial a été étudié. Le transport de matière dans la direction axiale dans l'écoulement de Taylor–Couette a été mesuré par une méthode électrochimique. Lorsqu'une faible circulation axiale est imposée ($Re_a < 10$), les tourbillons se mettent à se déplacer dans la direction axiale et à s'incliner, ce qui a été visualisé à l'aide de l'injection de colorant. Il a été montré que le débit axial conduisait alors à un rétrécissement et à une plus grande inclinaison des tourbillons sans changement de la direction d'inclinaison, et que le colorant circule dans les zones externes des tourbillons s'il est initialement injecté dans une zone externe. De plus, l'analogie avec un mécanisme proche de celui de la dispersion d'un paquet d'ondes faiblement non monochromatiques dans un milieu dispersif a été proposée pour expliquer l'observation selon laquelle les tourbillons avancent à une vitesse supérieure à la vitesse correspondant au débit axial imposé.

Remerciements

Les auteurs tiennent à remercier Mike Philpott et Mike Marshall pour leur assistance technique, l'agence DARPA pour l'aide financière qui a permis la réalisation de ce travail (DABT63-98-C-0053), ainsi que l'expert anonyme qui a relu la première version de ce manuscrit et dont les remarques ont été fort appréciées.

References

- [1] T. Mizushima, The electrochemical method in transport phenomena, *Adv. Heat Transfer* 7 (1971) 87–161.
- [2] D. Coles, Transition in circular Couette flow, *J. Fluid Mech.* 21 (3) (1965) 385–425.
- [3] Z.H. Gu, T.Z. Fahidy, The effect of geometric parameters on the structure of combined axial and Taylor vortex flow, *Can. J. Chem. Eng.* 64 (4) (1986) 185–189.
- [4] A. Lorenzen, G. Pfister, T. Mullin, End effects on the transition to time-dependent motion in the Taylor experiment, *Phys. Fluids* 26 (1982) 10–13.
- [5] C.A. Jones, The transition to wavy Taylor vortices, *J. Fluid Mech.* 157 (1985) 135–162.
- [6] J. Legrand, F. Coeuret, Circumferential mixing in one-phase and two-phase Taylor vortex flows, *Chem. Eng. Sci.* 41 (1) (1986) 47–53.
- [7] Z.H. Gu, T.Z. Fahidy, Visualization of flow patterns in axial flow between horizontal coaxial rotating cylinders, *Can. J. Chem. Eng.* 63 (2) (1985) 14–21.
- [8] D.I. Takeuchi, D.F. Jankowski, A numerical and experimental investigation of the stability of spiral Poiseuille flow, *J. Fluid Mech.* 102 (1981) 101–126.

- [9] J. Legrand, P. Dumargue, F. Coeuret, Overall mass transfer to the rotating inner electrode of a concentric cylinder reactor with axial flow, *Electrochim. Acta* 25 (1980) 669–673.
- [10] G. Desmet, H. Verelst, G.V. Baron, Local and global dispersion effects in Couette–Taylor flow – I. Description and modeling of the dispersion effects, *Chem. Eng. Sci.* 51 (8) (1996) 1287–1298.
- [11] J. Legrand, F. Coeuret, M. Billon, Structure dynamique et transfert de matière liquide – paroi dans le cas de l'écoulement laminaire tourbillon de Couette–Poiseuille, *Int. J. Heat Mass Transfer* 26 (7) (1983) 1075–1085.
- [12] N. Ohmura, K. Kataoka, Y. Shibata, T. Makino, Effective mass diffusion over cell boundaries in a Taylor–Couette flow system, *Chem. Eng. Sci.* 52 (11) (1997) 1757–1765.
- [13] K. Kataoka, H. Do, T. Komai, Heat/mass transfer in Taylor vortex flow with constant axial flow rates, *Int. J. Heat Mass Transfer* 20 (1977) 57–63.
- [14] K. Moser, L.G. Raguin, A. Harris, H.D. Morris, J. Georgiadis, M. Shannon, M. Philpott, Visualization of Taylor–Couette and spiral Poiseuille flows using a snapshot FLASH spatial tagging sequence, *Magn. Reson. Imaging* 18 (2) (2000) 199–207.
- [15] H.A. Snyder, R.B. Lambert, Harmonic generation in Taylor vortices between rotating cylinders, *J. Fluid Mech.* 26 (3) (1966) 545–562.
- [16] R.C. Giordano, R.L.C. Giordano, D.M.F. Prazeres, C.L. Cooney, Analysis of a Taylor–Poiseuille vortex flow reactor – I: flow patterns and mass transfer characteristics, *Chem. Eng. Sci.* 53 (20) (1998) 3635–3652.
- [17] H.A. Snyder, Experiments on the stability of spiral flow at low axial Reynolds numbers, *Proc. R. Soc. A* 265 (1962) 198–214.
- [18] K.C. Chung, K.N. Astill, Hydrodynamic instability of viscous flow between rotating coaxial cylinders with fully developed axial flow, *J. Fluid Mech.* 81 (1977) 641–655.
- [19] H.A. Snyder, Change in waveform and mean flow associated with wavelength variation in rotating Couette flow, part I, *J. Fluid Mech.* 35 (1969) 335–352.
- [20] D. Haim, L.M. Pismen, Performance of a photochemical reactor in the regime of Taylor–Görtler vortical flow, *Chem. Eng. Sci.* 49 (8) (1994) 1119–1129.